

Graphes : définitions

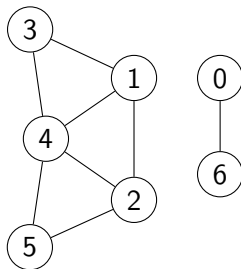
Quentin Fortier

April 4, 2022

Graphe = dessin ?

Un graphe est constitué :

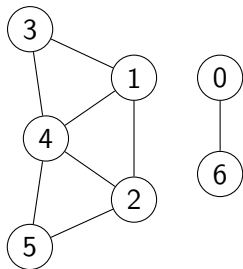
- 1 de **sommets** (**vertices** en anglais), représentés par des points
- 2 d'**arêtes** (**edges** en anglais), représentés par des traits entre les points



Définition formelle

Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (V, E)$ où :

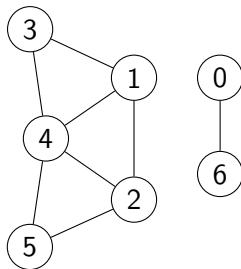
- 1 V est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2 E est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets



Définition formelle

Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (V, E)$ où :

- 1 V est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2 E est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets



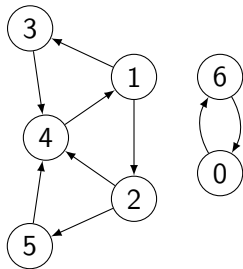
Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$E = \{\{0, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

Définition formelle

Un **graphe orienté** est un couple $\vec{G} = (V, \vec{E})$ où :

- 1 V est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2 $\vec{E} \subseteq V \times V$ est un ensemble de **couples** de sommets (appelés **arcs**)

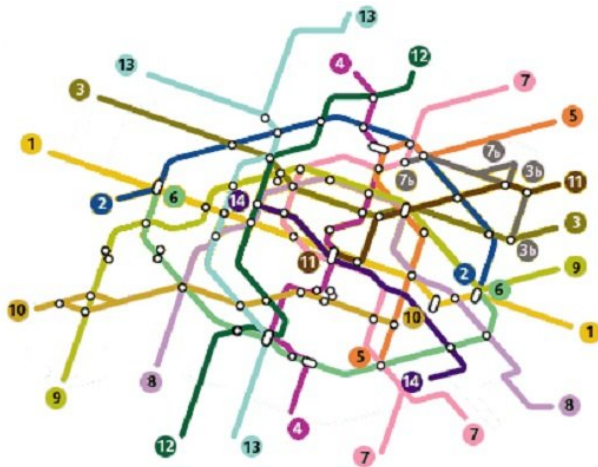


Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$\vec{E} = \{(0, 6), (6, 0), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (5, 4)\}$.

Exemple

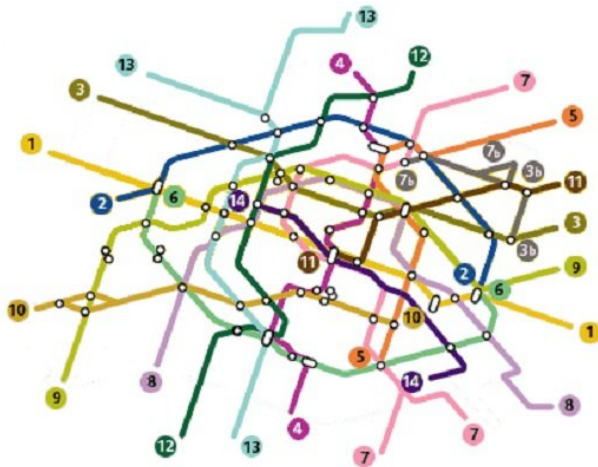
Graphe du métro parisien :



Sommets =

Exemple

Graphe du métro parisien :

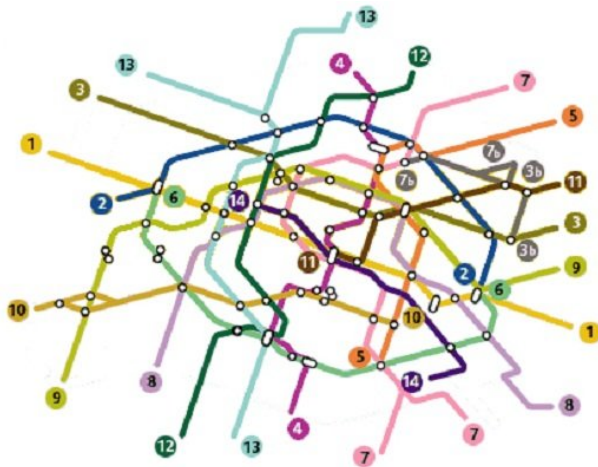


Sommets = stations de métro

Arêtes =

Exemple

Graphe du métro parisien :



Sommets = stations de métro

Arêtes = trajet entre 2 stations consécutives de la même ligne

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté $\deg(v)$, est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
Pour un graphe orienté, on note $\deg^-(v)$ et $\deg^+(v)$ les degrés entrants et sortants de v .

Formule des degrés

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

- 1 $2|E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
- 2 $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

- 1 $2|E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
- 2 $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Pour un graphe orienté : $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

- 1 $2|E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
- 2 $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Pour un graphe orienté : $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$

Autre preuve : récurrence sur le nombre d'arêtes.

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v) \text{ pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v) \text{ impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

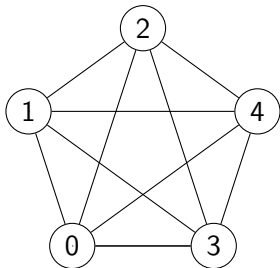
Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v) \text{ pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v) \text{ impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Application : existe-t-il un graphe dont les sommets ont pour degrés 1, 2, 2, 3, 5 ?

Graphe complet

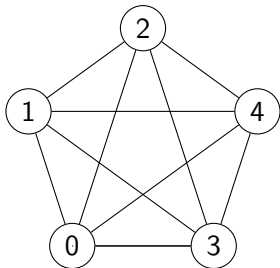
Un **graphe complet** est un graphe non orienté possédant toutes les arêtes possibles.



Un graphe complet avec n sommets a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes

Graphe complet

Un **graphe complet** est un graphe non orienté possédant toutes les arêtes possibles.

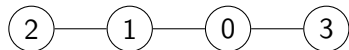


Un graphe complet avec n sommets a $\binom{n}{2}$ arêtes : c'est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à n sommets.

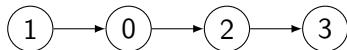
De façon générale, tout graphe à n sommets et m arêtes vérifie $m = O(n^2)$.

Chaque sommet a degré $n - 1$.

Un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives différentes.



Chemin (non orienté) entre 2 et 3



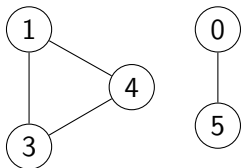
Chemin (orienté) de 1 à 3

La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arêtes.

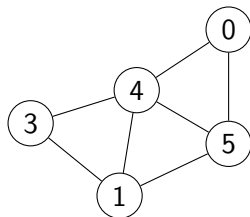
La **distance** de u à v est la plus petite longueur d'un chemin de u à v (∞ si il n'y a pas de chemin) : c'est une distance au sens mathématique.

Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



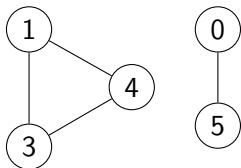
Graphe non connexe



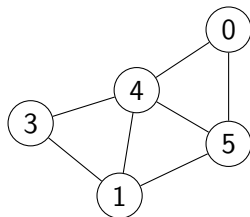
Graphe connexe

Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



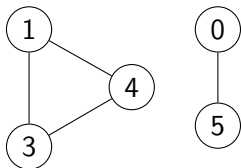
Graphe non connexe



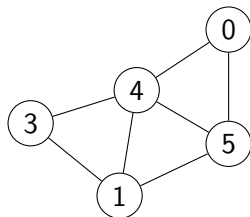
Graphe connexe

On peut montrer par récurrence que le nombre minimum d'arêtes d'un graphe connexe est au moins

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



Graphe non connexe



Graphe connexe

On peut montrer par récurrence que le nombre minimum d'arêtes d'un graphe connexe est au moins $n - 1$.

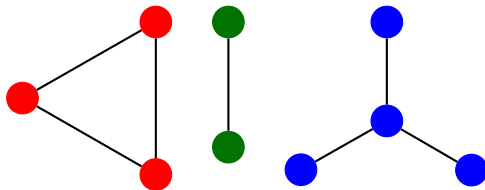
Composantes connexes

Tout graphe peut être partitionné en **composantes connexes**, qui sont ses plus grands sous-graphes connexes.

Composantes connexes

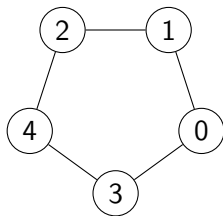
Tout graphe peut être partitionné en **composantes connexes**, qui sont ses plus grands sous-graphes connexes.

Par exemple, voici un graphe avec 3 composantes connexes :

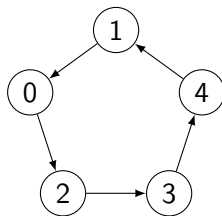


Cycle

Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.



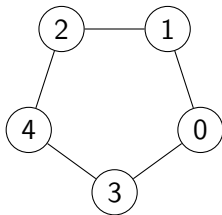
Cycle non orienté



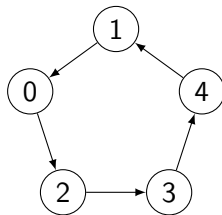
Cycle orienté

Un cycle avec n sommets a

Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.



Cycle non orienté



Cycle orienté

Un cycle avec n sommets a n arêtes.
Le degré de chaque sommet est 2.

Exemples

Soit σ une permutation de $\{0, \dots, n-1\}$.

On peut lui associer un graphe orienté (V, \vec{E}) où :

- 1 $V = \{0, \dots, n-1\}$
- 2 $\vec{E} = \{(v, \sigma(v)), \forall v \in V\}$

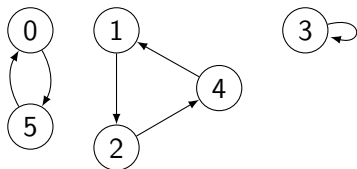
Exemples

Soit σ une permutation de $\{0, \dots, n-1\}$.

On peut lui associer un graphe orienté (V, \vec{E}) où :

- 1 $V = \{0, \dots, n-1\}$
- 2 $\vec{E} = \{(v, \sigma(v)), \forall v \in V\}$

Si $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:



Les cycles d'une permutation sont celles de son graphe.

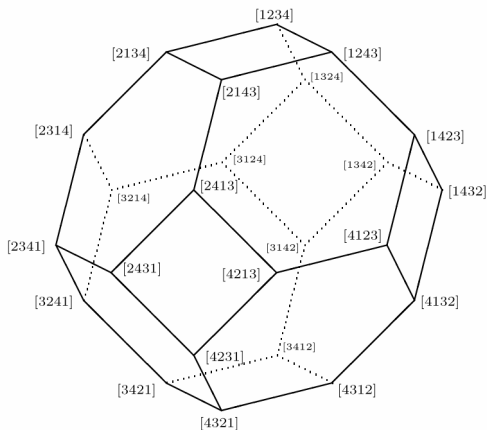
Exemples

Le permutoèdre d'ordre n a pour sommets les permutations de $\{0, \dots, n - 1\}$ et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets :

Degré de chaque sommet :

Nombre d'arêtes :



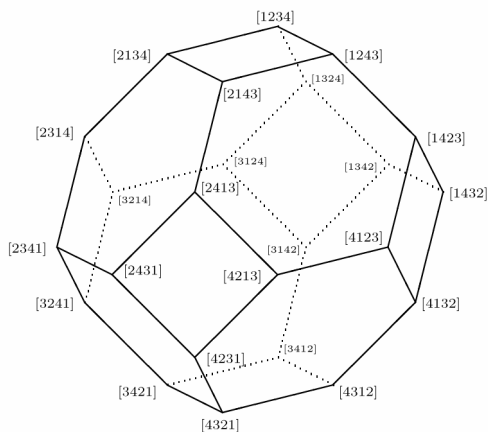
Exemples

Le permutoèdre d'ordre n a pour sommets les permutations de $\{0, \dots, n - 1\}$ et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets : $n!$

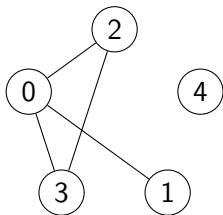
Degré de chaque sommet :

Nombre d'arêtes :

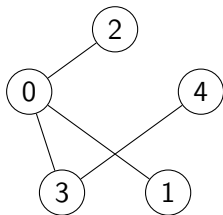


Graphe acyclique

Un graphe est **acyclique** (ou : sans cycle) s'il ne contient pas de cycle.



Graphe contenant un cycle

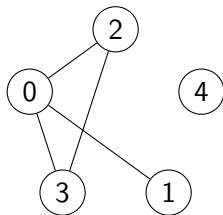


Graphe acyclique

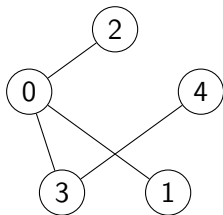
On peut montrer par récurrence que le nombre maximum d'arêtes d'un graphe acyclique est

Graphe acyclique

Un graphe est **acyclique** (ou : sans cycle) s'il ne contient pas de cycle.



Graphe contenant un cycle



Graphe acyclique

On peut montrer par récurrence que le nombre maximum d'arêtes d'un graphe acyclique est $n - 1$.

Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il est **connexe et acyclique**.

C'est équivalent aux conditions suivantes :

- T est connexe et a $n - 1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n - 1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T .

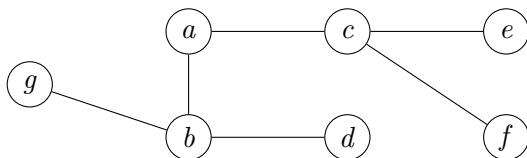
Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il est **connexe et acyclique**.

C'est équivalent aux conditions suivantes :

- T est connexe et a $n - 1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n - 1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T .

Exemple d'arbre :



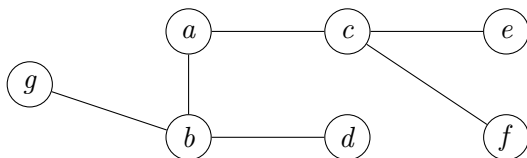
Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il est **connexe et acyclique**.

C'est équivalent aux conditions suivantes :

- T est connexe et a $n - 1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n - 1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T .

Exemple d'arbre :



Application : relier (en électricité, fibre optique...) plusieurs maisons avec le moins de fil possible.