Graphes : Parcours en largeur (BFS)

Quentin Fortier

May 16, 2022

File

Une **file** est une structure de donnée possédant les opérations :

- Ajout d'un élément à la fin de la file.
- Extraction (suppression et renvoi) de l'élément au début de la file. Ainsi, c'est toujours l'élément le plus ancien qui est extrait.

File

Une **file** est une structure de donnée possédant les opérations :

- Ajout d'un élément à la fin de la file.
- Extraction (suppression et renvoi) de l'élément au début de la file. Ainsi, c'est toujours l'élément le plus ancien qui est extrait.

Une file est aussi appelée structure FIFO (*First In, First Out*) alors qu'une pile est LIFO (*Last In, First Out*).

File

On pourrait utiliser une liste `L` Python comme une file avec `L.insert(0, e)` pour ajouter au début et `L.pop()` pour supprimer le dernier élément.

File

On pourrait utiliser une liste `L` Python comme une file avec `L.insert(0, e)` pour ajouter au début et `L.pop()` pour supprimer le dernier élément.

Mais `L.insert(0, e)` serait en $O(n)$ (quand on supprime le 1er élément il faut décaler tous les autres), ce qui n'est pas satisfaisant.

File

Il est plus efficace d'utiliser la classe `deque` (pour *doubly-ended queue*) du module `collections`, qui permet d'ajouter au début avec `appendleft` et d'extraire à la fin avec `pop` :

```
from collections import deque

q = deque() # file vide
q.appendleft(4)
q.appendleft(7)
q.pop() # renvoie 4
q.appendleft(-5)
q.pop() # renvoie 7
```

Parcours en largeur (BFS) : Avec file

Parcours en largeur avec file q ($\approx$ DFS avec pile) :

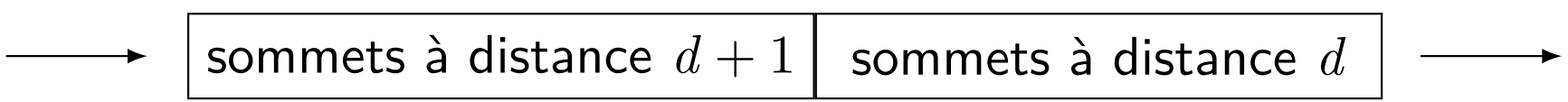
```
def bfs(G, s):
    visited = [False]*len(G)
    q = deque([s])
    while len(q) > 0:
        u = q.pop()
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            for v in G[u]:
                q.appendleft(v)
```

Parcours en largeur (BFS) : Avec file

Parcours en largeur avec file q ($\approx$ DFS avec pile) :

```
def bfs(G, s):
    visited = [False]*len(G)
    q = deque([s])
    while len(q) > 0:
        u = q.pop()
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            for v in G[u]:
                q.appendleft(v)
```

La file q est toujours de la forme :

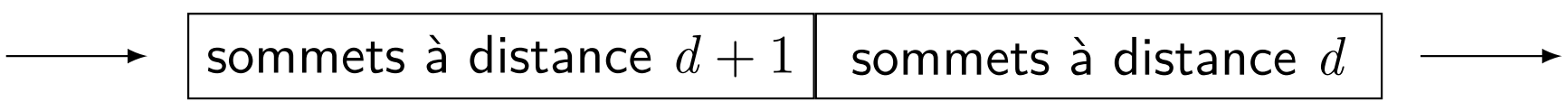


Parcours en largeur (BFS) : Avec file

Parcours en largeur avec file q ($\approx$ DFS avec pile) :

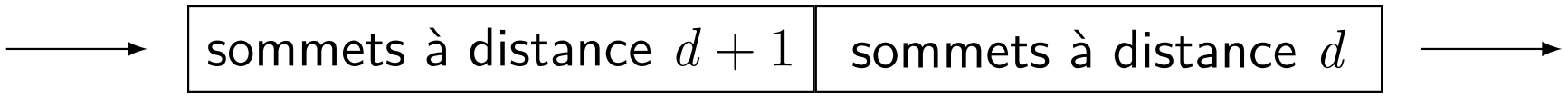
```
def bfs(G, s):
    visited = [False]*len(G)
    q = deque([s])
    while len(q) > 0:
        u = q.pop()
        if not visited[u]:
            visited[u] = True
            for v in G[u]:
                q.appendleft(v)
```

La file q est toujours de la forme :



Les sommets sont donc **traités par distance croissante** à s : d'abord s, puis les voisins de s, puis ceux à distance 2...

Parcours en largeur (BFS) : Avec 2 couches



Une variante du BFS utilise deux listes : `cur` pour la couche courante, `next` pour la couche suivante.

```
def bfs(G, s):
    visited = [False]*len(G)
    cur, next = [s], []
    while len(cur) + len(next) > 0:
        if len(cur) == 0:
            cur, next = next, []
        u = cur.pop()
        if not visited[u]:
            for v in G[u]:
                next.append(v)
```

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet `s` aux autres?

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet `s` aux autres?

Stocker des couples (sommet, distance) dans la file et stocker les distances dans un tableau `dist` (`dist[v]` = distance de `s` à `v`) :

Application au calcul de distance

Question

Comment connaître la distance d'un sommet `s` aux autres?

Stocker des couples (sommet, distance) dans la file et stocker les distances dans un tableau `dist` (`dist[v]` = distance de `s` à `v`) :

```
def distances(G, s):
    dist = [-1]*len(G)
    q = deque([(s, 0)])
    while len(q) > 0:
        u, d = q.pop()
        if dist[u] == -1:
            dist[u] = d
            for v in G[u]:
                q.appendleft((v, d + 1))
    return dist
```

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Question

Comment connaître un plus court chemin d'un sommet s à un autre?

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Question

Comment connaître un plus court chemin d'un sommet `s` à un autre?

Stocker `pred[v]` = prédécesseur de `v` dans le parcours :

```
def bfs(G, s):
    pred = [-1]*len(G)
    q = deque([(s, s)])
    while len(q) > 0:
        u, p = q.pop()
        if pred[u] == -1:
            pred[u] = p
            for v in G[u]:
                q.appendleft((v, u))
    return pred
```

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Question

Comment connaître un plus court chemin d'un sommet `s` à un autre?

On peut ensuite remonter les prédécesseurs de `v` à `s` :

```
def path(pred, s, v):
    L = []
    while v != s:
        L.append(v)
        v = pred[v]
    L.append(s)
    return L[::-1] # inverse le chemin
```

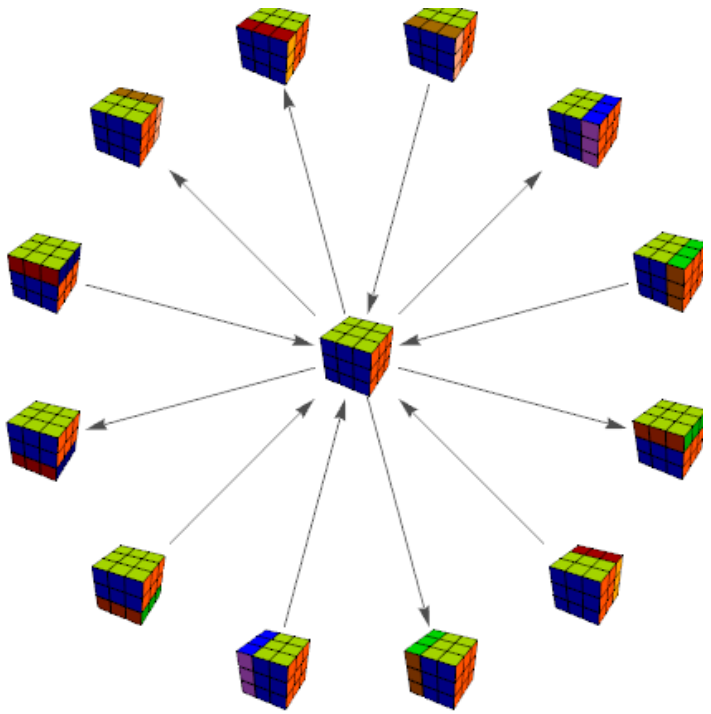
Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Application : résoudre un Rubik's Cube avec le nombre minimum de coups.

Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Application : résoudre un Rubik's Cube avec le nombre minimum de coups.

1. Sommets = configurations possibles du Rubik's Cube.
2. Arêtes = mouvements élémentaires.



Application au calcul de distance : Plus courts chemins

Application : résoudre un Rubik's Cube avec le nombre minimum de coups.

1. Sommets = configurations possibles du Rubik's Cube.
2. Arêtes = mouvements élémentaires.

Théorème (2010)

Le **diamètre** (distance max entre deux sommets) du graphe des configurations du Rubik's Cube est 20.

$\Longrightarrow$ on peut résoudre n'importe quel Rubik's Cube en au plus 20 mouvements.